

# Biegung

Vorlesung und Übungen  
1. Semester BA Architektur



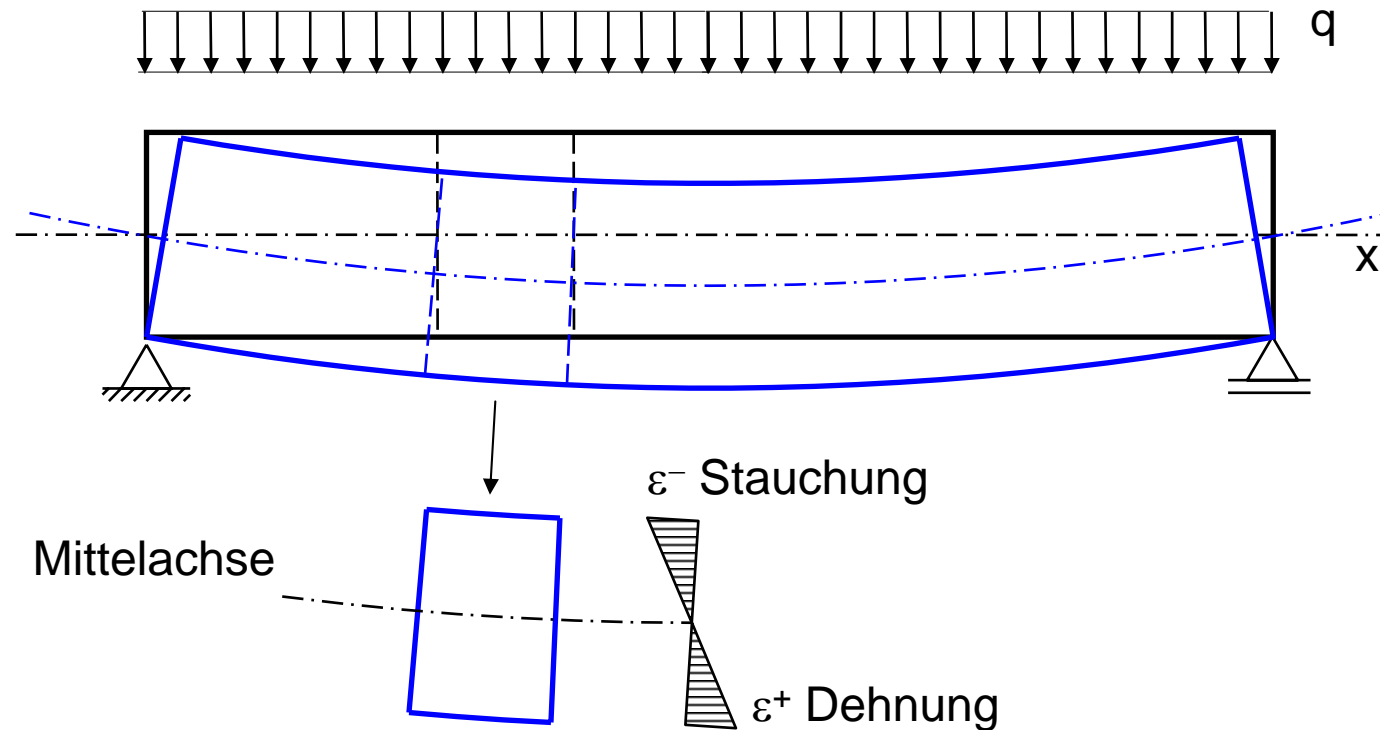
# Statik- und Festigkeitslehre

## Biegung

- Biegung
- Spannungsnachweise

# Statik- und Festigkeitslehre

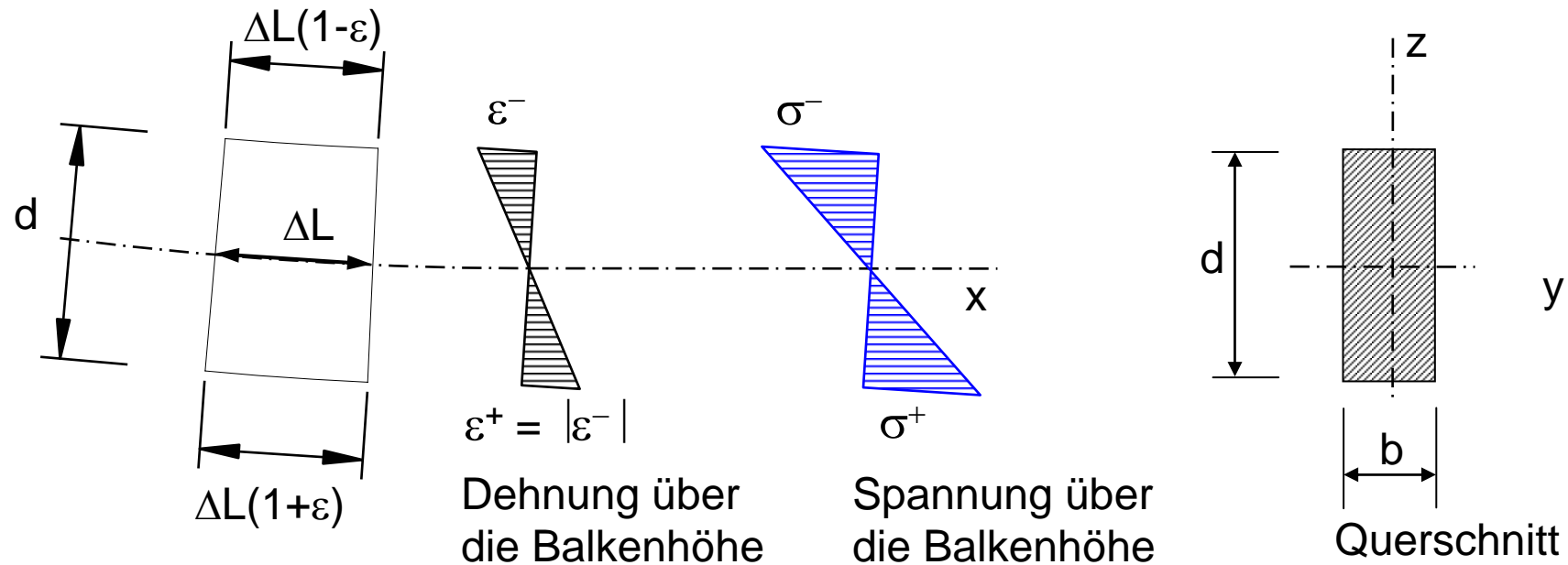
## Biegung



- Mittelachse krümmt sich und bleibt ungedehnt
- Der Querschnitt bleibt im verformten Zustand eben
- Der obere Rand wird um denselben Betrag gestaucht wie der untere Rand gedehnt

# Statik- und Festigkeitslehre

## Biegungsspannung



- Der Querschnitt ist ein Rechteck
- Dehnung verhält sich linear über die Höhe des Balkens
- Spannung ist proportional zur Dehnung (Hooke'sches Gesetz  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ )
- lineare Spannungsverteilung über die Höhe des Balkens

# Statik- und Festigkeitslehre

## Biegespannung

Resultierende Druckkraft D aus der Spannungsverteilung

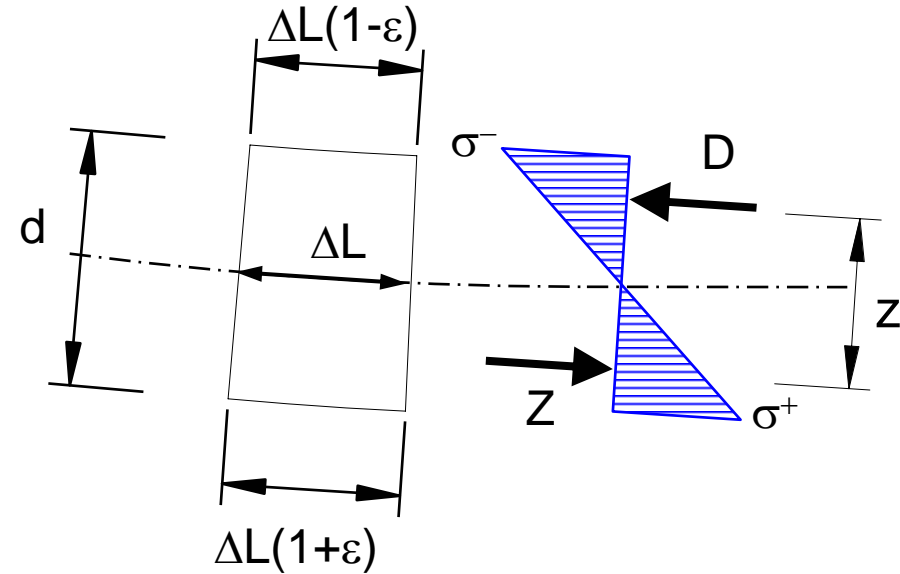
$$D = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{1}{2} \cdot d \cdot \sigma^- = \frac{1}{4} \cdot b \cdot d \cdot \sigma^-$$

Resultierende Zugkraft Z aus der Spannungsverteilung

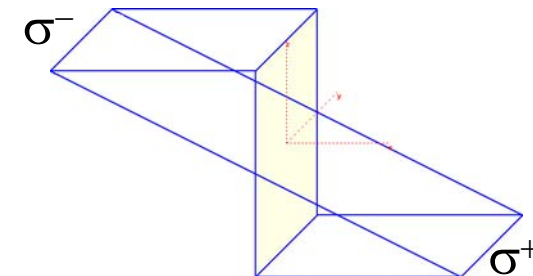
$$Z = \frac{1}{4} \cdot b \cdot d \cdot \sigma^+$$

Horizontales Gleichgewicht

$$D = -Z$$



Spannungsverteilung über die Breite b



# Statik- und Festigkeitslehre

## Biegespannung

Resultierendes Moment M

Drehpunkt Angriffspunkt von D

Innerer Hebelarm z

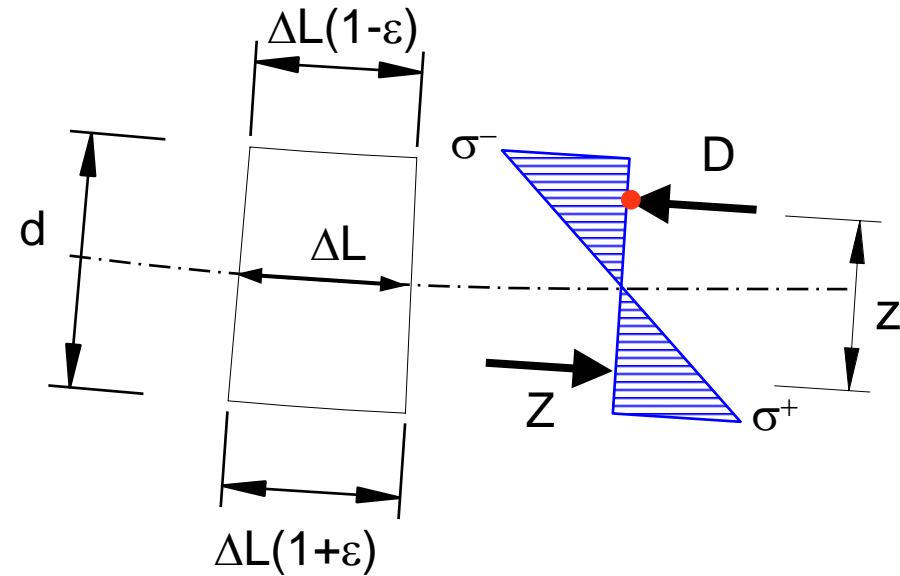
$$z = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot d = \frac{2}{3} \cdot d$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow$$

$$M = D \cdot \frac{2}{3} \cdot d = \frac{1}{4} \cdot d \cdot b \cdot \sigma^+ \cdot \frac{2}{3} \cdot d$$

$$M = \frac{1}{6} \cdot b \cdot d^2 \cdot \sigma^+$$

$$\sigma^+ = \frac{M}{\frac{1}{6} \cdot b \cdot d^2} = \frac{M}{W} = |\sigma^-|$$



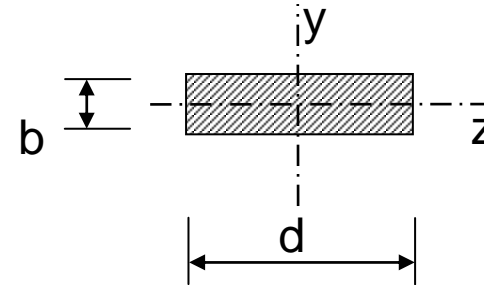
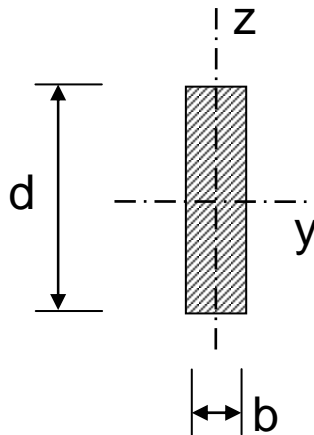
W ... Widerstandsmoment [cm<sup>3</sup>]

$$W = \frac{1}{6} \cdot b \cdot d^2$$

# Statik- und Festigkeitslehre

## Biegespannung

Beispiel Bohle  $d/b = 20 / 4$  cm



Biegung um die y-Achse

$$W_y = \frac{1}{6} \cdot b \cdot d^2 = \frac{1}{6} \cdot 4 \text{ cm} \cdot 20^2 \text{ cm}^2$$
$$= 267 \text{ cm}^3$$

$$W_y = \frac{267}{53} \cdot W_z = 5 \cdot W_z$$

Biegung um die z-Achse

$$W_z = \frac{1}{6} \cdot d \cdot b^2 = \frac{1}{6} \cdot 20 \text{ cm} \cdot 4^2 \text{ cm}^2$$
$$= 53 \text{ cm}^3$$

# Statik- und Festigkeitslehre

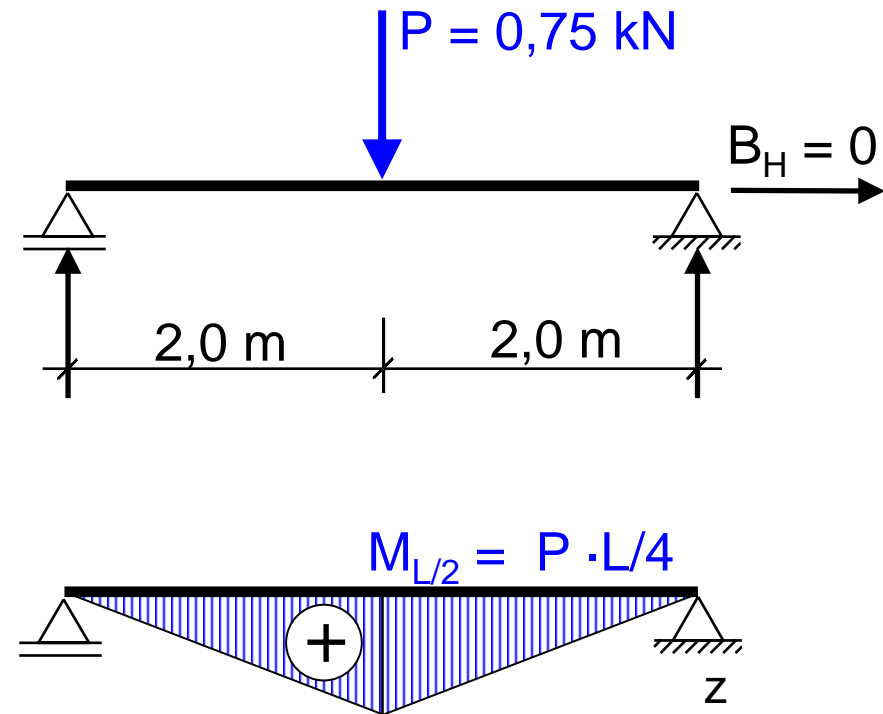
## Biegespannung

Beispiel Bohle  $d/b = 20 / 4 \text{ cm}$

$$M_{\max} = P \cdot \frac{L}{4}$$
$$= 0,75 \text{ kN} \cdot \frac{4 \text{ m}}{4} = 0,75 \text{ kNm}$$

$$\sigma_y = \pm \frac{M}{W_y} = \pm \frac{0,75 \text{ kNm}}{267 \text{ cm}^3}$$
$$= \pm \frac{75 \text{ kNcm}}{267 \text{ cm}^3} = \pm 0,28 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_z = \pm \frac{M}{W_z} = \pm \frac{0,75 \text{ kNm}}{53 \text{ cm}^3}$$
$$= \pm \frac{75 \text{ kNcm}}{53 \text{ cm}^3} = \pm 1,41 \text{ kN/cm}^2$$

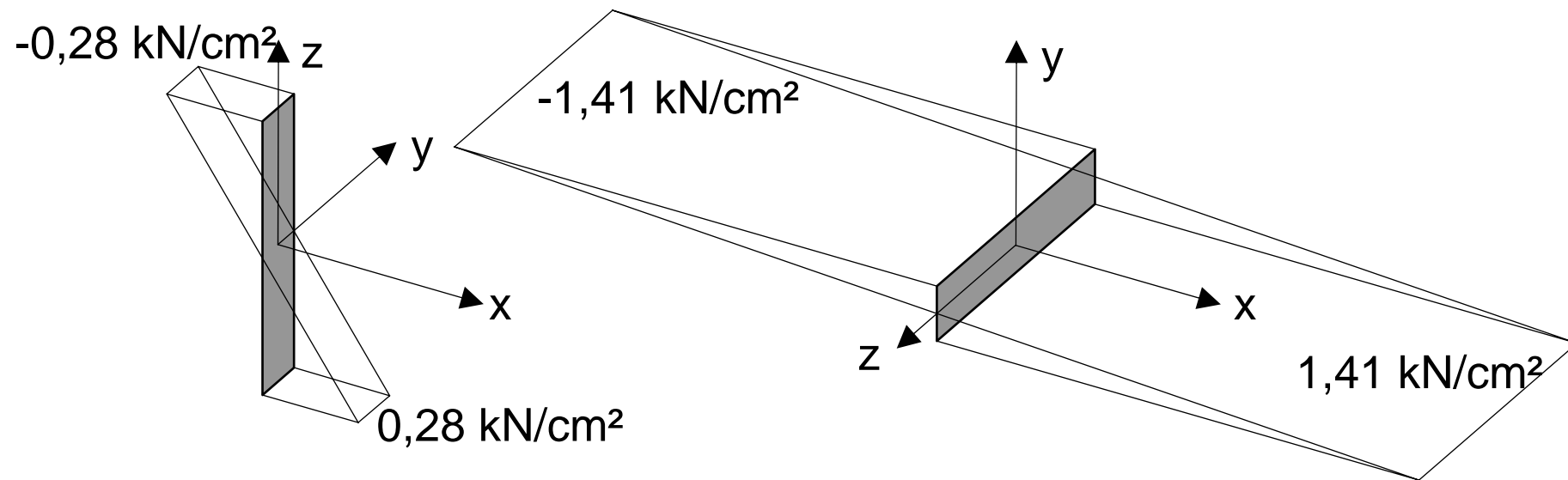




# Statik- und Festigkeitslehre

## Biegespannung

Beispiel Bohle  $d/b = 20 / 4 \text{ cm}$

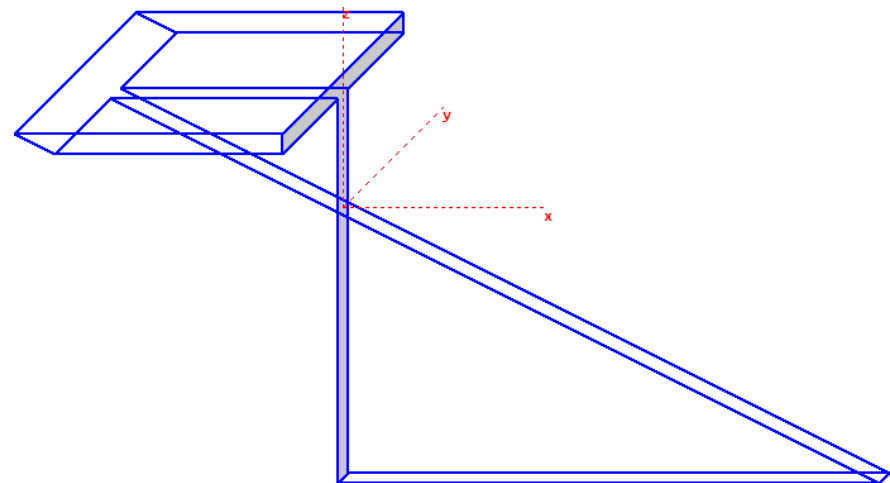
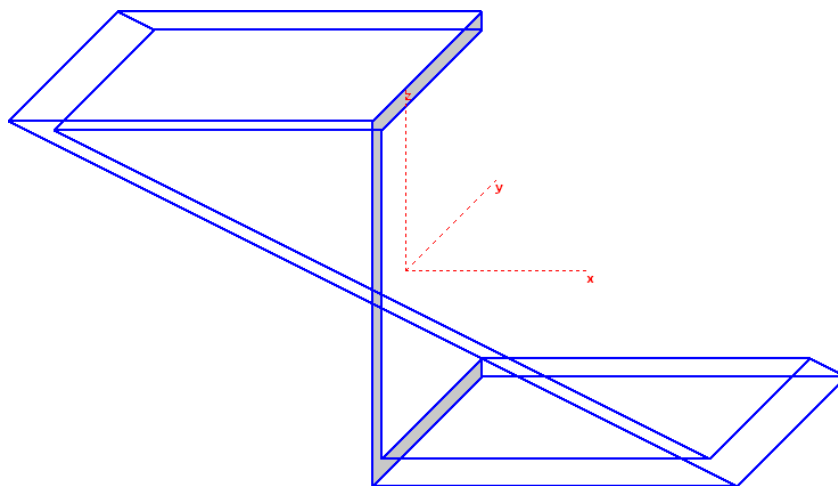
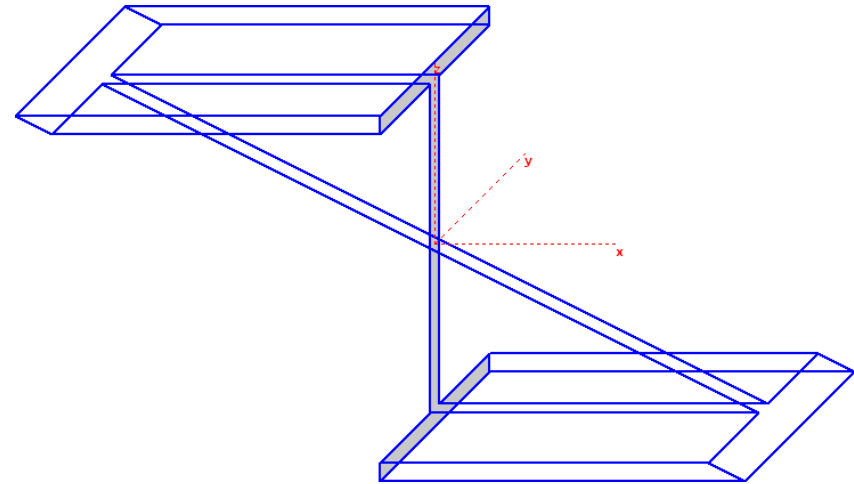
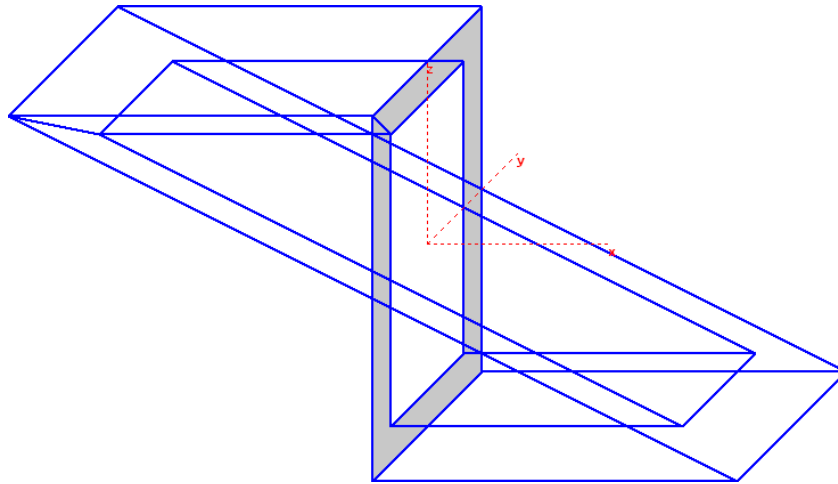


Spannungen  
Biegung um die y-Achse

Spannungen  
Biegung um die z-Achse

# Statik- und Festigkeitslehre

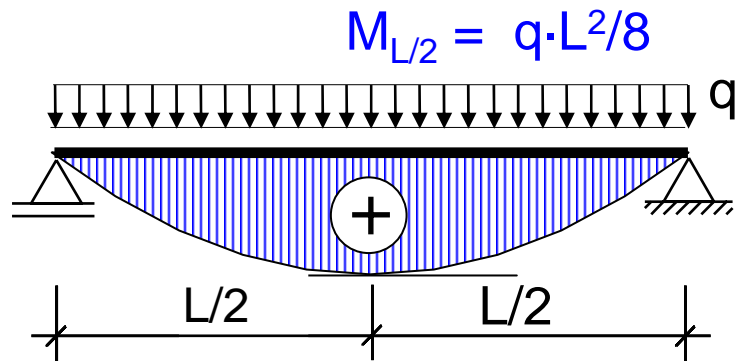
## Biegespannung



# Statik- und Festigkeitslehre

## Nachweis der Tragfähigkeit

Einwirkungen

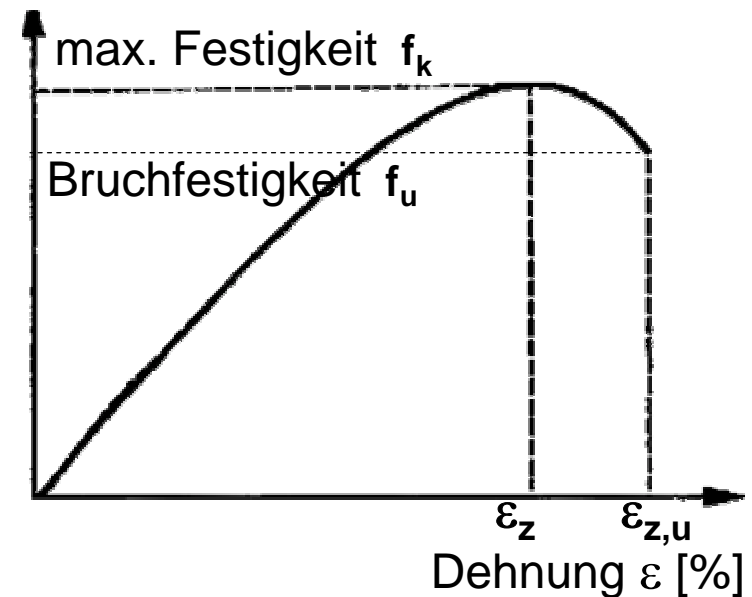


Lasten  
Stat. System  
Lagerung

Schnittgrößen  $N$ ,  $Q$ ,  $M$ ,  $M_T$

Werkstoffwiderstand

Spannung  $\sigma$   
[N/mm<sup>2</sup>]



Max. Festigkeiten  
Bruchfestigkeiten

# Statik- und Festigkeitslehre

## Nachweis der Tragfähigkeit

### Einwirkungen

Ungenauigkeiten in den

- Lastannahmen

Ungenauigkeiten in der Abbildung  
der statischen Systeme

- Ausmittigkeiten, Imperfektionen
- Ausbildung der Lager (frei verschieblich, nachgiebig, starr)
- Details (gelenkig, biegesteif)
- E-Moduli, z.B. Risse im Beton oder Mauerwerk

### Werkstoffwiderstand

Abminderung der max. Festigkeit  
und Bruchfestigkeit

- Streuung bei den Versuchen

Abminderung durch Einflüsse wie

- Häufigkeit
- Belastungsdauer
- Belastungsgeschwindigkeit
- Feuchtigkeit
- Temperatur, UV-Strahlung
- Korrosion
- Alterung, Ermüdung

# Statik- und Festigkeitslehre

## Nachweis der Tragfähigkeit

### Einwirkungen

Berücksichtigung der Ungenauigkeiten  
in den Lasten durch

Sicherheitsfaktoren  $\gamma_F$

Eigenlasten von Baustoffen  $\gamma_F = 1,35$

Nutzlasten, Schnee, Wind  $\gamma_F = 1,5$

Bei mehr als einer Einwirkung zur  
Eigenlast sind Lastkombinationen mit  
Kombinationswerten zu berücksichtigen

Unterscheidung zwischen ständiger,  
vorübergehender und  
außergewöhnlicher Situation

### Werkstoffwiderstand

Berücksichtigung der Abminderung  
der Festigkeiten durch

Sicherheitsfaktoren  $\gamma_M$

Stahl  $\gamma_M = 1,1$

Beton  $\gamma_M = 1,5$

Bewehrungsstahl  $\gamma_M = 1,15$

Holz  $\gamma_M = 1,3$

# Statik- und Festigkeitslehre

## Nachweis der Tragfähigkeit

### Einwirkungen

Bemessungswert  $F_d$  einer Einwirkung mit dem charakteristischen Wert der Einwirkung  $F_k$

$$F_d = \gamma_F \cdot F_k$$

Bemessungswert  $E_d$  einer Schnittgröße oder Verzerrung mit dem Bemessungswerte der Einwirkung

$$E_d = E(F_d, a_d, \dots)$$

$a_d$  Geometrische Größen wie Spannweiten, Querschnittswerte, ...

### Werkstoffwiderstand

Bemessungswert  $X_d$  einer Baustoffeigenschaft mit dem charakteristischen Wert  $X_k$

$$X_d = \eta \cdot X_k / \gamma_M$$

Bemessungswert  $R_d$  des Bauteilwiderstandes / Tragwiderstandes

$$R_d = R(X_d, a_d, \dots)$$

$\eta$  Abminderungsfaktor für Lastdauer, Maßstabeffekt, Temperatur, Feuchtigkeit usw.

Grenzzustand der Tragfähigkeit  $E_d < R_d$

# Statik- und Festigkeitslehre

## Nachweis der Tragfähigkeit

Beispiel Bohle  $d/b = 20 / 4$  cm

Bemessungswerte der Einwirkungen

Eigenlast

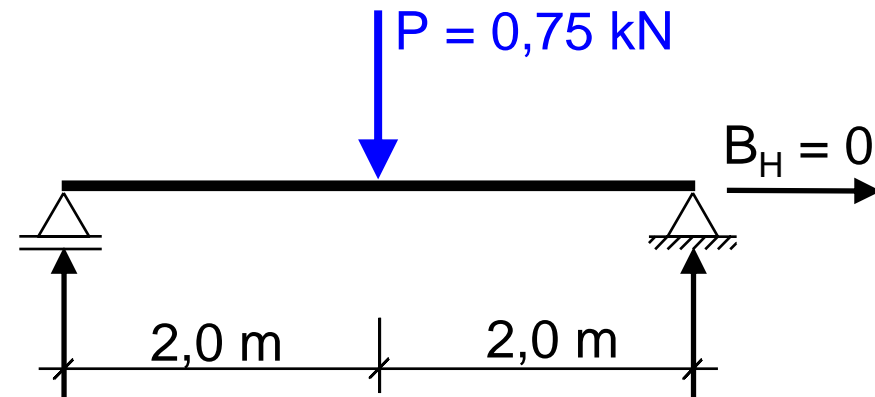
$$g_d = 1,35 \cdot 0,2 \text{ m} \cdot 0,04 \text{ m} \cdot 5 \text{ kN/m}^3 \\ = 0,054 \text{ kN/m}$$

Nutzlast

$$P_d = 1,5 \cdot 0,75 \text{ kN} = 1,125 \text{ kN}$$

Maximales Biegemoment, Bemessungswert

$$M_{E,d} = 0,054 \text{ kN/m} \cdot 4^2 \text{ m}^2/8 + 1,125 \text{ kN} \cdot 4\text{m}/4 \\ = 0,108 \text{ kNm} + 1,125 \text{ kNm} = 1,233 \text{ kNm}$$



# Statik- und Festigkeitslehre

## Nachweis der Tragfähigkeit

Bemessungswerte der Bauteilwiderstände

Charakteristische Festigkeit Nadelholz C 24

Biegung  $f_{m,k} = 24 \text{ N/mm}^2$

Bemessungswert der Bauteilfestigkeit

$$\sigma_{R,d} = \eta \cdot f_{m,k} / \gamma_M = k_{\text{mod}} \cdot f_{m,k} / \gamma_M$$

Nutzlast

$$k_{\text{Mod}} = 0,8$$

$$\begin{aligned} \sigma_{R,d} &= 0,8 \cdot 24 \text{ N/mm}^2 / 1,3 \\ &= 14,77 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Beziehung zwischen Spannung  $\sigma_{E,d}$  und Biegemoment  $M_{E,d}$

$$\sigma_{E,d} = \frac{\text{Biegemoment}}{\text{Widerstandsmoment}} = \frac{M_{E,d}}{W}$$

Nachweis der Tragfähigkeit

$$\sigma_{E,d} \leq \sigma_{R,d} \Rightarrow \frac{\sigma_{E,d}}{\sigma_{R,d}} \leq 1$$



# Statik- und Festigkeitslehre

## Nachweis der Tragfähigkeit

Beispiel Bohle  $d/b = 20 / 4$  cm

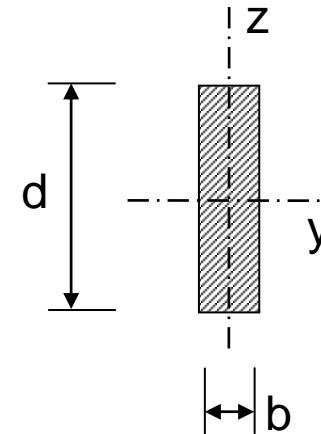
Biegung um die y-Achse

$$\begin{aligned}\sigma_{E,d} &= M_{E,d} / W_y = 1,233 \cdot 100 \text{ kNcm} / 267 \text{ cm}^3 \\ &= 0,462 \text{ kN/cm}^2 = 4,62 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Nachweis der Tragfähigkeit

$$\frac{\sigma_{E,d}}{\sigma_{R,d}} \leq 1$$

$$\frac{4,62}{14,77} = 0,31 \leq 1 \Rightarrow \text{Ausnutzung } 31 \%$$



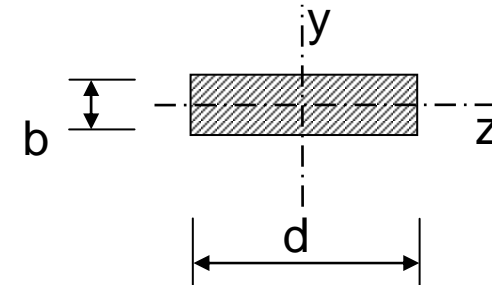
# Statik- und Festigkeitslehre

## Nachweis der Tragfähigkeit

Beispiel Bohle  $d/b = 20 / 4$  cm

Biegung um die z-Achse

$$\begin{aligned}\sigma_{E,d,g} &= M_{E,d} / W_z = 1,233 \cdot 100 \text{ kNcm} / 53 \text{ cm}^3 \\ &= 2,33 \text{ kN/m}^2 = 23,3 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$



Nachweis der Tragfähigkeit

$$\frac{\sigma_{E,d}}{\sigma_{R,d}} \leq 1$$

$$\frac{23,3}{14,77} = 1,58 > 1$$

⇒ Querschnitt nicht tragfähig !!!!!!!

Tragfähigkeit um 58 % überschritten